

Revista de Administración Pública



Generación de Valor en el Sector Educativo por Medio del Uso de Tecnologías de Información en el Pronóstico de la Demanda

David Muñoz Negrón, Omar Romero Hernández
Emiliano Detta Silveira, David G. Muñoz Medina*

1. Introducción

La salud en las finanzas públicas continúa representando un pilar para el desarrollo económico del país. Desde hace algunos años, los mayores ingresos por la renta petrolera se han venido canalizando a varias iniciativas entre las que destacan el sector educativo. Sin embargo, la presión que representa el aumento en los precios internacionales de la gasolina y los alimentos, obliga a los gobiernos a revisar su gasto operativo, incorporar programas de austeridad y al mismo tiempo continuar salvaguardando el beneficio social.

Lo anterior puede lograrse en parte a partir de la adopción de tecnologías de información y el desarrollo de modelos matemáticos que pronostiquen el comportamiento de variables de interés en organismos del sector público. Un mejor pronóstico de la demanda de servicios educativos representa un mejor nivel de servicio y menores costos.

El caso de estudio presentado en este artículo se desarrolla en el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA), el

*David Muñoz Negrón es Ingeniero en estadística, UNALM del Perú. Maestro y Doctor en Investigación de Operaciones, Stanford University, Jefe del Departamento de Ingeniería Industrial y Operaciones del Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM). Omar Romero Hernández es Ingeniero Químico, UNAM. Doctor en Ingeniería Económica y Medio Ambiente, Imperial College, Inglaterra. Profesor y Director del Centro de Desarrollo Tecnológico del ITAM. Emiliano Detta Silveira es Ingeniero Industrial del ITAM. David G. Muñoz Medina es Ingeniero Industrial del ITAM. Maestría en Management Science and Engineering. Stanford University.

cual es la instancia del gobierno de México encargada de educar a personas mayores de 15 años que no han completado satisfactoriamente sus estudios de primaria y/o secundaria. Desde principios del año 2000, el INEA ha llevado a cabo un rediseño del modelo educativo de primaria y secundaria, hasta llegar a lo que se conoce como el Modelo de Educación para la Vida y el Trabajo (MEVyT). La implantación de este nuevo modelo educativo finalizó en diciembre del 2004. Como consecuencia de la introducción de este modelo es necesario programar la compra de grandes cantidades de libros (módulos) para satisfacer la demanda de los nuevos alumnos que se han estado incorporando al MEVyT. Es relevante mencionar que desde el año 2005 se asignan más de 300 millones de pesos anuales para la producción y distribución de alrededor de 5 millones de módulos individuales de estudio; la cantidad total corresponde a la suma de los 42 tipos distintos de módulos que forman parte del esquema curricular de este modelo educativo.

La necesidad de desarrollar y aplicar nuevas herramientas para la estimación de la demanda es cada día mayor, particularmente en mercados dinámicos y sujetos a externalidades y preferencias del consumidor, como el que representa la demanda de módulos educativos en el INEA (ver otro ejemplo en Kalchschmidt et al. 2006). En este artículo se ilustra la utilización de un modelo basado en la aplicación para el pronóstico de la demanda de material educativo para la educación de los adultos en México, así como el potencial de la simulación como herramienta para el pronóstico utilizando un modelo detallado del fenómeno en estudio.

Luego de esta introducción, en la sección 2 se describen con mayor detalle los elementos del problema de pronóstico planteado por el INEA, y los principales pasos seguidos para su solución. En la sección 3 se presenta una formulación general del modelo Markoviano que se utilizó para elaborar los pronósticos requeridos por el INEA, la solución analítica de los problemas de estimación (puntual y de variabilidad) que se requieren resolver para construir los pronósticos, así como los principales resultados obtenidos al aplicar el modelo. Este modelo se detalla en el Apéndice 1. En la sección 4 se presenta una metodología de estimación basada en simulación, que pudiera ser utilizada en modelos de pronósticos para los que la obtención de una solución analítica no es posible, o es muy complicada. Esta metodología se detalla en el Apéndice 2. Finalmente en la sección 5 se discuten las principales conclusiones obtenidas de este estudio.

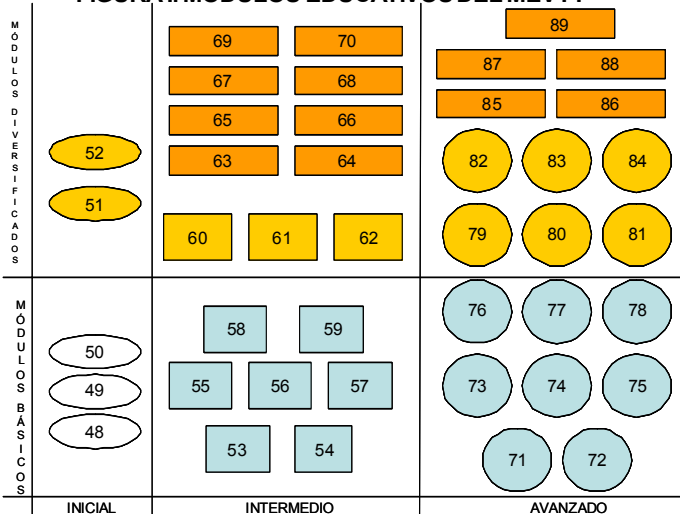
2. Descripción del caso de estudio

2.1 El modelo educativo MEVyT

El Modelo de Educación para la Vida y el Trabajo (MEVyT) contempla las etapas de educación primaria y de secundaria. La etapa de educación primaria se compone de 2 niveles, el inicial y el intermedio, mientras que la etapa de educación secundaria se compone solamente por el nivel avanzado. Cada nivel tiene un cierto número de módulos básicos que se tienen que aprobar obligatoriamente. Además, en la primaria se deben de cursar 2 módulos diversificados y otros 4 en la secundaria, estos últimos son módulos que el educando puede escoger dentro de una serie de temas posibles. En resumen, el educando debe acreditar 18 módulos básicos además de 6 módulos diversificados, sumando un total de 24 módulos (ver Fig. I).

En el MEVyT se puede acreditar un módulo bajo alguna de las tres modalidades siguientes: (i) examen final, (ii) diagnóstico o (iii) equivalencia. Cuando un educando decide presentar examen final, éste pide un módulo (libro) con todo el material que se requiere y al final de un periodo definido presenta el examen. Si acredita por diagnóstico, el educando no utiliza libro alguno, simplemente presenta un examen sin utilizar ningún material previo proporcionado por el MEVyT. Si se acredita un módulo por equivalencia, significa que el alumno ya cursó hasta un año en particular en la primaria o en la secundaria y le revalidan un número estándar de materias. Otra manera de acreditar mediante equivalencia ocurre al traspasarse educandos del modelo educativo anterior al actual. Una descripción más detallada del MEVyT puede consultarse en Detta (2006).

FIGURA I: MÓDULOS EDUCATIVOS DEL MEVYT



2.2 *Definición del problema*

El estudio que se reporta tuvo su origen en la necesidad del INEA por resolver sus problemas de operación y planeación derivados de la falta de una metodología sustentada para estimar la demanda de libros año con año. Esta problemática se vio reflejada en una inadecuada planeación y control del inventario, problemas de abasto y en muchos casos de exceso en la compra de material.

Para resolver esta situación se propuso generar una metodología que contemplara las características específicas del sistema (información disponible, preferencias del educando, planes regionales) y que permita construir un pronóstico adecuado de la demanda de módulos con un valor esperado y una medida de variabilidad. Además, sería deseable que los resultados que se generen al aplicar la metodología para el pronóstico de la demanda arrojen una variabilidad relativamente baja con el fin de generar un pronóstico más preciso.

2.3 *Información de base*

Con el objetivo de pronosticar la demanda de libros para el año 2005, se dispone de información consistente solamente para los años 2003 y 2004, lo que constituyó una limitante para el modelo de pronóstico desarrollado. Por otro lado, también se consideraron otros factores como el periodo, el horizonte y el intervalo del pronóstico (Montgomery y Johnson 1990). El periodo del pronóstico es la unidad básica de tiempo en la que se hace el pronóstico, para este caso, ya que la información es anual, el periodo del pronóstico será en años. El horizonte que considera el pronóstico es solamente de un año debido a la falta de información de años anteriores, y el comportamiento de la demanda en el año anterior será determinante para pronosticar el comportamiento del año posterior. Por último, el intervalo del pronóstico es el periodo de tiempo con el que el pronóstico se realiza, y se propone que éste sea anual, ya que la planeación de la producción e inventarios del INEA se realiza anualmente.

La información recabada para la estimación de la demanda está conformada por millones de registros que requerían ser analizados para asegurarse de filtrar las posibles inconsistencias, errores y omisiones que suelen aparecer en bases de datos. Esta actividad se llevó a cabo a partir del análisis del tipo de formato y campos de la base de datos así como un análisis de consistencia, que se detallan a continuación. Es conveniente mencionar, que tanto la información contenida en la base de datos como los programas para el análisis de consistencia de la información, seguirán enriqueciendo la información disponible en el futuro, por lo que es de

esperar que el modelo de pronóstico actual (descrito en la sección 3.1) mejore en detalle y complejidad para incorporar la nueva información disponible.

Análisis del tipo de formato y campos de la base de datos del INEA

El INEA proporcionó una base de datos con información histórica proveniente de su Sistema Automatizado de Seguimiento y Acreditación (SASA). Este sistema registra, da seguimiento, retroalimenta, califica, acredita y certifica a todos los adultos que atiende el INEA. Al iniciarse el estudio, el SASA contaba con más de 7 millones de registros, cada uno de los cuales contiene los siguientes campos de información:

(1) Identificación del educando (RFE), (2) Clave de la delegación geográfica, (3) Clave de la zona geográfica dentro de la delegación geográfica, (4) Clave del examen, (5) Clave del nivel, (6) Clave del modelo educativo, (7) Clave del módulo, (8) Variable que indica si el módulo fue acreditado, (9) Fecha de aplicación del examen, (10) Clave del motivo de cancelación y (11) Fecha de la cancelación de la calificación.

Pruebas de consistencia de la información

Se desarrolló un programa en Visual Basic for Applications (VBA) desde una hoja de cálculo (Excel) para poder depurar y manejar la bases de datos con la información indicada anteriormente. Dicho programa toma la información desde la base de datos en un archivo de texto, y aplica diversas reglas para determinar que los registros del archivo sean consistentes. Como resultado del análisis de la base de datos se detectó que aproximadamente el 2% de los datos mostraban errores y por lo tanto no se tomaron en cuenta. Estos son algunos ejemplos de los errores más comunes:

Error Tipo 1

El estudiante aprobó el mismo módulo dos veces, pero en zonas diferentes. Por ejemplo:

AAAC6612082E4,1,AGUASCALIENTES,1,2,50,B2ELE,SI,01/
16/02,DG,DIAGNOSTICO

AAAC6612082E4,1,AGUASCALIENTES,2,2,50,B2ELE,SI,09/
14/04,DG,DIAGNOSTICO

Error Tipo 2

Se cargó dos veces la revalidación de un módulo. Por ejemplo:

AABM750126D32,1,AGUASCALIENTES,1,3,77,B3EHE,SI,11/
26/03,EQ,EQUIVALENCIA

AABM750126D32,1,AGUASCALIENTES,1,3,77,B3EHE,SI,11/
27/03,EQ,EQUIVALENCIA

3. Modelo de pronóstico para el INEA

Una alternativa explorada inicialmente para el pronóstico de la demanda de libros de cada módulo fue el análisis de regresión, considerando como variable dependiente la demanda de un módulo en el año correspondiente, y como variables independientes la cantidad de estudiantes que aprobaron cada módulo en el año anterior. Considerando datos agregados para 32 diferentes delegaciones, y seleccionando las variables independientes más importantes (se usó el procedimiento *stepwise*, ver Draper y Smith 1998), se obtuvieron los grados de libertad necesarios para estimar los coeficientes de regresión. La regresión es un procedimiento estandarizado que se utiliza frecuentemente para construir un pronóstico. Sin embargo, muchos de sus supuestos son difíciles de corroborar en la práctica y se sabe que la función lineal a menudo es una aproximación de la función verdadera. Con base en estas premisas, se decidió proponer un modelo que tome en consideración que los módulos tomados por un estudiante en un año determinado son un buen indicador de si el estudiante decide tomar o no un módulo determinado en el siguiente año. El modelo propuesto es un modelo Markoviano sencillo cuya formulación general se presenta en el Apéndice 1. La simplicidad del modelo propuesto ha permitido la obtención de expresiones analíticas para el pronóstico (puntual y de variabilidad) con este modelo, mismas que se presentan en el Apéndice 1. Posteriormente en las secciones 3.1 y 3.2 se presentan los detalles de la implantación del modelo y un resumen de los resultados más importantes.

3.1 Definición de los estados considerados en el modelo del INEA

Al analizar los datos de la base de datos, se consideraron tres tipos de estado inicial para los estudiantes del año por pronosticar: los que corresponden a los educandos que han aprobado un módulo por examen final (Tipo 1), los que corresponden a los educandos que han aprobado módulos por diagnóstico y equivalencias (Tipo 2) y los que corresponden a estudiantes nuevos o que no han aprobado ningún módulo (Tipo 3).

Estados Tipo 1

Estos estados se identifican por los módulos aprobados por el educando por examen final en el año t . Por ejemplo, $i=\{49,52\}$ significa

que el educando aprobó los módulos 49 y 52 en el año inmediato anterior al pronóstico.

Estados Tipo 2

Debido a que los estados Tipo 1 excluyen a los educandos que aprobaron sólo por diagnóstico o equivalencia, se agregaron al sistema 13 estados nuevos que incorporaban a estos educandos, considerando criterios relacionados con el número de módulos aprobados y nivel del educando.

Estado Tipo 3

Además de los 13 estados anteriores, se incorporó uno adicional que incluye a los educandos que son nuevos. Este estado incluye tanto a las personas que no han tenido actividad, pero que sí demandaron un módulo el año siguiente, como a los educandos nuevos, y se pueden identificar como los educandos que no han aprobado ningún módulo en un año, pero tienen actividad el año siguiente.

3.2 Implementación del modelo

Para la implementación del modelo de pronóstico del INEA, el periodo t es el año 2004 y el periodo $t+1$ es el año 2005. Para estimar los parámetros del modelo, es decir, las probabilidades p_1, p_1, \dots, p_2 de demandar un módulo dependiendo del estado del estudiante, se utilizaron las bases de datos de los años 2003 y 2004.

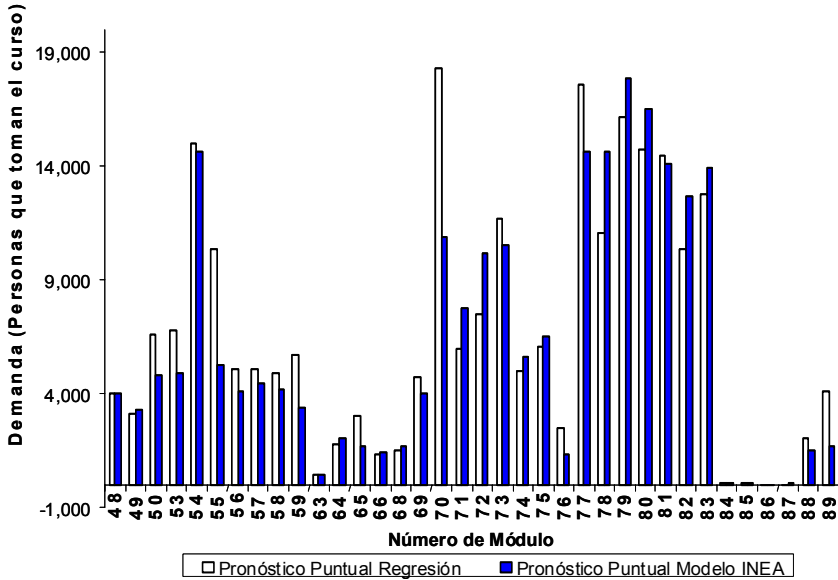
Se obtuvieron 593 estados diferentes (incluyendo los 14 estados tipos 2 y 3) a partir de los datos observados en el 2003. Con los estados ya definidos el paso siguiente fue contar cuántas personas había en cada estado y estimar las probabilidades de compra para cada módulo. Por otro lado, se observó si existían estados adicionales en el 2004, diferentes a los ya contabilizados, encontrándose que solamente había 2 estados adicionales que contenían a 9 personas en total. Por esta razón, no se tomaron en cuenta los estados adicionales del 2004, ya que las personas contenidas en ellos correspondían a menos del .0001% del total del sistema.

El modelo descrito en el Apéndice 1 se aplicó para pronosticar la demanda de cada uno de los 36 módulos más importantes del MEVyT, y en cada una de las 32 delegaciones que cubre el programa. En cada caso se produjo un pronóstico puntual de acuerdo con (7) y su correspondiente medida de variabilidad de acuerdo con (8). Como se mencionó al inicio de la sección 3, inicialmente se probó la generación de pronósticos usando análisis de regresión y el

procedimiento stepwise para seleccionar las variables relevantes, por lo que en la Figura II se muestra una comparación de los pronósticos puntuales para una delegación, cuyos resultados son un ejemplo típico de lo ocurrido en las otras delegaciones. Como puede apreciarse, los pronósticos puntuales son similares en la mayoría de las delegaciones, excepto por algunos casos (e.g. 55, 70, 77, 78), donde los valores de las variables independientes en el modelo de regresión para esta delegación se encontraron lejos del promedio.

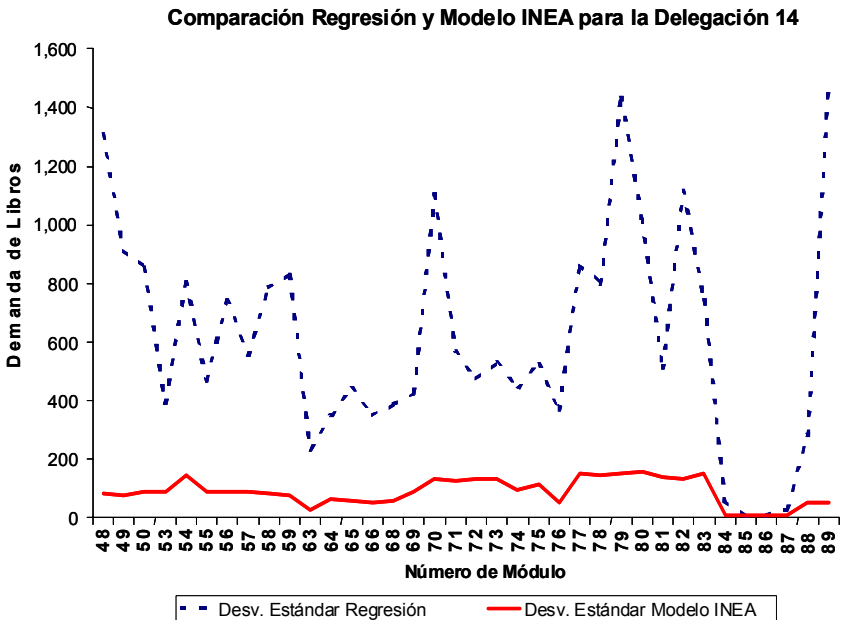
FIGURA II: PRONÓSTICOS PUNTALES POR REGRESIÓN Y POR MODELO INEA

Comparación Regresión y Modelo INEA para la Delegación 14



En la Figura III se muestra una comparación de las medidas de variabilidad del pronóstico puntual obtenidas por regresión y por el modelo descrito en el Apéndice 1, respectivamente. Con el objetivo de uniformizar unidades se está reportando la desviación estándar, es decir la raíz de la varianza definida en (8) para el modelo INEA, y la conocida desviación estándar del pronóstico de un valor particular para el análisis de regresión (ver por ejemplo, Montgomery y Johnson 1990). Como puede apreciarse en la Figura III, las medidas de variabilidad que proporcionan los diferentes métodos de pronóstico, confirmando en este caso que el modelo INEA no sólo tiene una mejor explicación a partir del fenómeno en estudio, sino que las estimaciones puntuales son más precisas.

FIGURA III: MEDIDAS DE VARIABILIDAD POR REGRESIÓN Y POR MODELO INEA



4. Estimación de parámetros usando simulación

Como demuestran los resultados mostrados en la sección anterior, la construcción de un modelo más detallado del fenómeno en estudio puede no sólo tener más sentido, sino que la estimación puntual puede ser más precisa, por lo que es de esperar que en el futuro se pueda proponer un modelo más detallado (y complejo) a medida que incremente y se incorpore la información disponible en la base de datos. Considerando que un modelo más complejo podría dificultar la obtención de una solución analítica para el pronóstico puntual y/o de variabilidad, se desarrolló un marco que permite estimar las medidas de pronóstico (4) y (5), bajo condiciones muy generales, utilizando simulación. Los detalles del marco se presentan en el Apéndice 2. Este marco puede ser muy útil cuando la complejidad del modelo de pronóstico no permite la obtención de expresiones analíticas. Aprovechando también los resultados analíticos del modelo INEA, se presentan algunos resultados experimentales que confirman la validez de la metodología de estimación por simulación.

Con el objetivo de ilustrar el desempeño de los intervalos de confianza asintóticos propuestos en (12), en las tablas 1 y 2 se

presentan algunos resultados experimentales obtenidos con datos de prueba correspondientes al modelo INEA. Es conveniente mencionar que en Detta (2006) se presentan resultados de estimaciones por simulación de $r(x_0)$ y $V(x_0)$, utilizando los datos reales del SASA, y el método del bootstrap paramétrico discutido en Cheng y Holland (2004).

En los cuadros 1 y 2 se reportan resultados de 1000 repeticiones de procedimientos de estimación a través de intervalos del 95% de confianza, cada uno con diferente número de repeticiones por experimento ($m = 100, 500$ y 1000). En todos los experimentos se consideró el modelo descrito en §3.1, con $k=5$ estados, $n_i=i$, y $r_i=10-i$, $i=1, \dots, 5$, que de acuerdo con (7) y (8) proporcionan $r(x_0)$ y $V(x_0)=17.628$. El conocimiento del valor de los parámetros permitió calcular la fracción de veces que el intervalo cubrió al parámetro (cobrimiento empírico), así como el sesgo y el error cuadrático promedio empíricos. El ancho medio corresponde a la mitad del ancho del correspondiente intervalo de confianza, definido en (12).

Cuadro 1: Desempeño de intervalos del 95% de confianza para $r(x_0)$

m	Cubrimiento Empírico	Ancho Medio		Error Cuadrático Promedio	Sesgo
		Promedio	Des. Est.		
100	0.956	0.818	0.058	0.164	-0.020
500	0.946	0.367	0.011	0.036	-0.014
1000	0.945	0.259	0.006	0.018	-0.006

Cuadro 2: Desempeño de intervalos del 95% de confianza para $v(x_0)$

m	Cubrimiento Empírico	Ancho Medio		Error Cuadrático Promedio	Sesgo
		Promedio	Des. Est.		
100	0.93	4.792	0.893	6.189	-0.045
500	0.959	2.141	0.173	1.126	0.020
1000	0.943	1.516	0.092	0.598	-0.054

Los datos reportados en los Cuadros 1 y 2 muestran que se obtuvo una convergencia muy rápida, tanto para la estimación de $r(x_0)$ como de $v(x_0)$, ya que con sólo 100 repeticiones por experimento se encuentran cubrimientos empíricos muy cercanos al nominal de 0.95. Por otro lado, los anchos medios tienden a reducirse a medida que se incrementa el número de repeticiones por experimento, así como el error cuadrático promedio y el sesgo, confirmando la consistencia de los procedimientos de estimación.

5. Conclusiones

La aplicación de tecnologías de información (TI) y la investigación de operaciones en entidades de la administración pública federal representan una oportunidad para lograr un gasto público eficiente y aumentar el beneficio social.

Lo anterior quedó ilustrado con un caso de éxito relacionado con el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA). En particular, se mostró el desarrollo de un modelo basado en la aplicación para el pronóstico de la demanda de material educativo para la educación de los adultos en México. Asimismo, se aprovecharon las bondades de las tecnologías de información para analizar una base de datos con más de siete millones de registros y la aplicación de la simulación como herramienta para el pronóstico utilizando un modelo detallado del fenómeno en estudio.

Es importante mencionar las implicaciones de la aplicación del modelo y del uso de las TI en el INEA y consecuentemente, en las finanzas públicas: se han identificado ahorros superiores a los 75 millones de pesos, una mejora en el nivel de satisfacción, reportado por las entidades estatales y sobretodo un mayor número de educandos satisfechos lo cual repercute en un mayor número de adultos en el sistema educativo. Una población más educada es también un camino para la justicia social. Si bien, este modelo no resuelve un enorme número de problemas educativos si sirve para atender de mejor manera a los millones de mexicanos adultos que están en busca de una mejor educación.

El caso que se reporta puede ser aprovechado para solucionar problemas similares de pronóstico de la demanda en otros organismos de la administración pública. Este modelo constituye la solución de un problema real de pronóstico utilizando tres fuentes de información: (i) una base de datos con millones de registros y con duplicidades e inconsistencias en su contenido, (ii) opiniones subjetivas vertidas por los responsables de la educación para adultos en varias zonas geográficas del país, y (iii) las preferencias del consumidor y las restricciones de diseño que forman parte de un plan de educación para adultos.

Finalmente, se pueden establecer las siguientes conclusiones para el caso de la aplicación desarrollada para el INEA:

-Los pronósticos usando el modelo INEA proporcionaron una variabilidad menor que la regresión lineal, lo que muestra que un modelo detallado no sólo puede tener una mejor interpretación para el fenómeno en estudio, sino que puede también proporcionar pronósticos más precisos.

-Tanto el modelo INEA como el análisis de regresión arrojan pronósticos puntuales similares, al parecer los valores de la regresión difieren de los del modelo INEA en algunos casos, coincidentemente esto ocurre cuando la demanda es alta, lo que puede atribuirse a la conocida ineficiencia del análisis de regresión cuando se trata de hacer extrapolaciones.

-A juzgar por los resultados obtenidos con el modelo INEA podemos concluir que el desarrollo de un modelo detallado, considerando las relaciones particulares del fenómeno en estudio puede ser beneficioso no sólo porque se obtiene una mejor interpretación del modelo sino que se puede mejorar la precisión de los estimadores. Cuando el modelo resultante es complicado, al punto de no permitir una solución analítica para las medidas de pronóstico, se puede utilizar el procedimiento de estimación propuesto en §4, que permiten obtener estimaciones consistentes para las medidas de pronóstico.

-Los resultados de la sección 4 muestran que una pequeña variante del método tradicional de repeticiones permite estimar los parámetros (puntual y de variabilidad) que a menudo requiere un pronóstico. La única modificación requerida es que en cada repetición del experimento, en lugar de mantener fijo el valor de los parámetros del modelo, éstos se muestrean de la distribución posterior. El procedimiento resultante permite obtener estimadores consistentes, cuyos valores se aproximan a los de sus correspondientes parámetros a medida que crece el número de repeticiones del experimento por simulación. Se muestra además cómo se pueden calcular intervalos de confianza asintóticos, cuyo ancho medio tiende a cero, y que permiten establecer si los estimadores obtenidos tienen la precisión deseada o si se requiere de un mayor número de repeticiones del experimento por simulación.

- Por último, la utilidad de las metodologías propuestas en este artículo están íntimamente ligadas a la capacidad del modelo detallado para imitar el sistema real, la cual dependerá de una buena elección de los parámetros, como de los componentes aleatorios del modelo, los que indudablemente dependen del problema particular por resolver. Es justamente en esta área, la búsqueda de modelos y aplicaciones particulares de los mismos, en la que se encuentra el mayor potencial de investigación relacionada con las metodologías propuestas en este artículo.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido patrocinada por la Asociación Mexicana de Cultura A.C. y por el Instituto Nacional de Educación para Adultos.

Se agradece a todas aquellas personas involucradas con alguna etapa del proyecto y en particular a la Dirección de Planeación, Administración, Evaluación y Difusión del INEA. Nuestro especial reconocimiento al Lic. Fernando Contreras, Lic. Luis López y sus colaboradores por su apoyo y compromiso.

Bibliografía

- Bernardo, J. M. y Smith, A. F. M., *Bayesian Theory*, John Wiley & Sons, England, 1994.
- Cheng R.C.H. y Holland W., *Calculation of confidence intervals for simulation output*, *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, Vol. 14, No. 4, 344-362, 2004.
- Chick, S. E., Input distribution selection for simulation experiments: accounting for input uncertainty, *Operations Research*, Vol. 49, No. 5, 744-758, 2001.
- Chung, K. L., *A Course in Probability Theory* (2a. Ed.), Academic Press Inc, San Diego, 1974.
- Detta, J. E., Estudio de un caso comparativo de pronósticos basados en regresión con pronósticos basados en simulación. Tesis del Departamento de Ingeniería Industrial y Operaciones, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Mexico, 2006.
- Draper, N. R. y Smith, H., *Applied Regression Analysis* (3era Ed.), John Wiley and Sons, Nueva York, 1998.
- Kalchschmidt, M., Verganti, R. y Zotteri, G., Forecasting demand from heterogeneous customers. *International Journal of Operations & Production Management*, Vol. 26, No. 6, 619-638, 2006.
- Karatzas, I. y Shreve, S. E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (2a Ed.), Springer Verlag, New York, 1991.
- Montgomery, D. y Johnson, L., *Forecasting and Time Series Analysis* (2a Ed.), McGraw-Hill International Editions, New York, 1990.
- Muñoz, D. F., A Bayesian framework for modeling demand in supply chain simulation experiments, Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference, Chick S. E., Sánchez P. J., Ferrin D., Morrice D. J. (Eds.) 2003, 1319-25.
- Serfling, R. J., *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley and Sons, New York, 1980.

40 *Revista de Administración Pública* XLIII 2

Shedler, G. S., *Regenerative Stochastic Simulation*, Academic Press Inc., San Diego, 1993.

Zouaoui, F. y Wilson, J. R., Accounting for parameter uncertainty in simulation input modelling, *IIE Transactions*, Vol. 35, No. 9, 781-792, 2003.

APÉNDICE 1

Formulación del modelo Markoviano para la estimación de la demanda

Sea $X = \{X_n; n=0, 1, \dots\}$ una cadena de Markov con un número finito de estados en $E = \{1, 2, \dots, k\}$. Supóngase que al tiempo t existen n individuos cuyo estado es conocido, y el cambio de estados (al tiempo $t+1$) de cada individuo obedece a la cadena de Markov X . Cuando el individuo l está en el estado X^l_{t+1} al tiempo $t+1$, su demanda por cierto artículo puede ser vista como una función $f(X^l_{t+1})$ de su estado, y aunque en un caso general será suficiente que la función f sea no-negativa, para el caso de INEA requerimos que:

$$f(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in A, \\ 0, & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

donde $A \subseteq E$ es el conjunto de estados en los que el individuo solicita el módulo cuya demanda se desea pronosticar. Nuestro interés radica en pronosticar la demanda total del módulo al tiempo $t+1$:

$$W = \sum_{l=1}^n f(X^l_{t+1})$$

(1)

Dado que en este caso se conoce el estado de cada individuo al tiempo t , el pronóstico de w dependerá de las probabilidades p_j definidas por:

$$p_i = P[f(X^l_{t+1}) = 1 | X^l_t = i] = \sum_{j \in A} P[X^l_{t+1} = j | X^l_t = i]$$

(2)

$i \in E, t=1, 2, \dots, l=1, 2, \dots, n$, y dado que el valor de estos parámetros es desconocido, se adoptará un marco Bayesiano (ver por ejemplo, Bernardo y Smith, 1994) para pronosticar w , denotando $\theta = (p_1, p_2, \dots, p_k)$, y asumiendo la existencia de una función de densidad *a priori* $p(\theta)$ que es positiva sólo en $P = \{\theta = (p_1, p_2, \dots, p_k) : 0 \leq p_i \leq 1, i = 1, \dots, k\}$. La información sobre θ proviene del registro del comportamiento de la población de indivi-

duos en periodos anteriores, y se puede resumir en un vector de datos $x_0 = (n_1, r_1, n_2, r_2, \dots, n_k, r_k)$ que resulta de observar que de n individuos que estaban en el estado $i \in E$ en algún periodo, r_i demandaron el artículo al siguiente periodo (y $n_i - r_i$ no lo demandaron). La función de verosimilitud resulta:

$$L(x_0|\theta) = \prod_{i=1}^k p_i^{r_i} (1 - p_i)^{n_i - r_i}$$

donde θ y x_0 son como antes. Con el objetivo de obtener una densidad posterior que tenga un efecto mínimo del prior (en relación a los datos), asumiremos un prior $p(\theta)$ no informativo. En nuestro caso, la matriz de información correspondiente a la verosimilitud $L(x_0|\theta)$ satisface las condiciones del Corolario de la Proposición 5.30 de Bernardo y Smith (1994), y en consecuencia $p(\theta)$ corresponde a la densidad conjunta de k variables independientes, donde p se distribuye como $Beta(1/2, 1/2)$, y la correspondiente densidad posterior resulta:

$$p(\theta|x_0) = \frac{p(\theta)L(x_0|\theta)}{\int_P p(\theta)L(x_0|\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^k p_i^{r_i - 1/2} (1 - p_i)^{n_i - r_i - 1/2}}{\prod_{i=1}^k B(r_i + 1/2, n_i - r_i + 1/2)}, \tag{3}$$

$\theta \in P$, donde $B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)$, para $\alpha, \beta > 0$. Es decir, la distribución posterior de los parámetros p_1, p_2, \dots, p_k corresponde a la distribución de variables independientes, donde p_i se distribuye como $Beta(r_i + 1/2, n_i - r_i + 1/2)$.

Como pronóstico puntual para la demanda se propone la esperanza condicional:

$$r(x_0) = E[W|x_0] = \int_P r_1(\theta)p(\theta|x_0)d\theta, \tag{4}$$

donde $r_1(\theta) = E[W|\Theta = \theta]$, y como medida de variabilidad la varianza condicional:

$$V(x_0) = E[W^2|x_0] - E[W|x_0]^2 = \int_P r_2(\theta) p(\theta|x_0) d\theta - r(x_0)^2$$

(5)

donde $r_2(\theta) = E[W^2|\Theta = \theta]$. A partir de (1)-(2) se puede verificar que:

$$r_1(\theta) = \sum_{i=1}^k n_{it} p_i, \quad r_2(\theta) = \sum_{i=1}^k n_{it} p_i + \sum_{i=1}^k n_{it} (n_{it} - 1) p_i^2 + \sum_{i \neq j} n_{it} n_{it} p_i p_j$$

, , (6)

donde n_{it} es el número de individuos que están en el estado i al tiempo t , y $r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$ son como en (5)-(6), por lo que no es difícil comprobar que los estimadores puntuales y de variabilidad propuestos en (4) y (5) resultan:

$$r(x_0) = \sum_{i=1}^k n_{it} \hat{p}_i,$$

(7)

$$V(x_0) = \sum_{i=1}^k n_{it} \hat{p}_i (1 - \hat{p}_i) \left(1 + \frac{n_{it} - 1}{2 + n_i} \right),$$

(8)

donde $\hat{p}_i = (r_i + 1/2)/(n_i + 1)$.

APÉNDICE 2

Marco teórico de la metodología de estimación por simulación

1. Marco teórico

Sea $Z = \{Z(s), s \geq 0\}$ el proceso estocástico (con valores en \mathfrak{R}^d) que representa la evolución de las variables de estado, y que constituyen la salida del modelo cuando se utiliza la simulación como herramienta de pronóstico. Nótese que este marco incluye procesos estocásticos en tiempo discreto como el modelo INEA, si se permite que $Z(s) = Z(\lfloor s \rfloor)$, donde $\lfloor s \rfloor$ denota a la parte entera de s . Debido a que se desea pronosticar una variable de respuesta de estado transitorio, se denota al tiempo de corrida por T , y por $W = g(Z(s), 0 \leq s \leq T)$ a la variable de respuesta que se desea pronosticar, asumiendo que T es un stopping time (ver Karatzas y Shreve, 1991) con respecto del proceso z .

Como ocurre a menudo en los modelos para pronóstico, la salida del modelo de simulación depende de un vector de parámetros desconocidos θ , algunos de los cuales pueden caracterizar a los componentes aleatorios (Chick 2001, Zouaoui y Wilson 2003, Muñoz 2003) del modelo. Debido a que se desea incorporar incertidumbre paramétrica, el vector de parámetros es una variable aleatoria θ , y $\theta \in P$ denotará a un valor particular para el parámetro, donde p es el espacio de parámetros.

Se dispone de información (datos) sobre los parámetros del modelo, que consiste de un conjunto de observaciones $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ que da lugar a la función de verosimilitud $L(x_0|\theta)$ (ver Bernardo y Smith 1994). Si $p(\theta)$ es la función de densidad *a priori* para el parámetro θ , entonces la función de densidad posterior (dada la información x_0) para el parámetro θ resulta:

$$p(\theta|x_0) = \frac{p(\theta)L(x_0|\theta)}{\int_P p(\theta)L(x_0|\theta)d\theta},$$

(9)

para $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$ y $\theta \in P$. Nótese que la existencia de $p(\theta)$ no es restrictiva, ya que si se desea considerar sólo la infor-

mación muestral, se puede utilizar una densidad *a priori* no informativa (ver Bernardo y Smith, 1994). Así por ejemplo, si la distribución no informativa $p(\theta)$ es constante, a partir de (9) vemos que:

$$p(\theta|x_0) = \frac{L(x_0|\theta)}{\int_P L(x_0|\theta)d\theta},$$

(10)

siempre y cuando $\int_P L(x_0|\theta)d\theta < \infty$.

Se asume que la información X_0 es independiente del experimento por simulación, por lo que, si $h(w|x_0, \theta)$ y $h(w|\theta)$ denotan a las funciones de densidad (probabilidad en el caso discreto) condicionales de la variable de respuesta w (dados $[X_0 = x_0, \Theta = \theta]$ y $[\Theta = \theta]$ respectivamente), entonces:

$$h(w|x_0, \theta) = h(w|\theta),$$

para $w \in \mathfrak{R}$, $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$, y $\theta \in P$.

En su forma más general, el pronóstico para la variable de respuesta está caracterizado por su función de densidad $h(w|x_0)$ (dada la información muestral $[X_0 = x_0]$), aunque en la práctica un pronóstico se expresa a través de estimadores puntuales y de variabilidad, por lo que es de interés la estimación (por simulación) de los parámetros $r(x_0)$ y $V(x_0)$ definidos en (4) y (5), respectivamente.

El parámetro $r(x_0) = E[W|X_0 = x_0]$ se propone como pronóstico puntual para la variable de respuesta w , mientras que la varianza $V(x_0)$ es una medida de variabilidad clásica.

2 Metodología de estimación por simulación

En la Figura 4 se presenta un algoritmo para estimar por simulación el pronóstico puntual (4) y la varianza del pronóstico (5). El procedimiento que se presenta está basado en el algoritmo propuesto en Chick (2001), adaptado a la notación introducida en §4.1, y con algún cálculo adicional para establecer intervalos asintóticos. Debido a que las observaciones de la variable de respuesta w que se generan en el algoritmo de la Figura 4 son independientes e idénticamente

distribuidas, es consecuencia directa de la Ley de los Grandes Números (ver por ejemplo, Chung, 1974), que los estimadores $\hat{r}_m(x_0)$ y S_m^2 son estimadores consistentes para $r(x_0)$ y $V(x_0)$, respectivamente, es decir, se aproximan a sus parámetros a medida que el número de repeticiones m crece. La consecuencia práctica de esta propiedad es que utilizando simulación se puede estimar las medidas de pronóstico $r(x_0)$ y $V(x_0)$ con la precisión deseada, incrementando el número de repeticiones del experimento por simulación.

Debido a que el número de repeticiones adecuado para obtener una precisión deseada, en general, depende del problema, es necesario medir la precisión de los estimadores $\hat{r}_m(x_0)$ y S_m^2 , lo cual a menudo se logra estableciendo intervalos de confianza asintóticos (ver por ejemplo, Shedler, 1993). Debido nuevamente a que las observaciones de la variable de respuesta son independientes e idénticamente distribuidas, se puede probar (ver Serfling, 1980), que:

$$\frac{\sqrt{m}[\hat{r}_m(x_0) - r(x_0)]}{S_m(x_0)} \Rightarrow N(0,1), \text{ and } \frac{\sqrt{m}[S_m^2 - V(x_0)]}{\sqrt{\hat{r}_m^m - S_m^4}} \Rightarrow N(0,1),$$

(11)

a medida que $m \rightarrow \infty$, donde " \Rightarrow " denota convergencia en distribución, $N(0,1)$ y $\chi_{(m-1)}$ denotan distribuciones normal estándar y Chi-cuadrado con $m-1$ grados de libertad, respectivamente.

Figura IV. Estimación de medidas de desempeño utilizando simulación

For $j = 1$ to the number of replications m :

- a. Generate (independently) a value θ_j by sampling from $\mathcal{P}(\theta|x_0)$.
- b. Run (independently) a simulation experiment with $\Theta = \theta_j$ to obtain:

$$W_j = g(V(s)|0 \leq s \leq T)$$

End Loop

Compute: $\hat{r}_m(x_0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m W_j$,

$$S_m^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m [W_j - \hat{r}_m(x_0)]^2, \hat{r}_m^4 = \frac{1}{m-4} \sum_{j=1}^m [W_j - \hat{r}_m(x_0)]^4$$

A partir de (11) se puede concluir que:

$$\left[\hat{r}_m(x_0) - z_{1-\alpha/2} \frac{S_m}{\sqrt{m}}, \hat{r}_m(x_0) + z_{\alpha/2} \frac{S_m}{\sqrt{m}} \right], \quad y$$

$$\left[S_m^2 - z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{r}_m^4 - S_m^4}}{\sqrt{m}}, S_m^2 + z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{r}_m^4 - S_m^4}}{\sqrt{m}} \right], \quad (12)$$

son intervalos asintóticos del $(1-\alpha)100\%$ de confianza para $r(x_0)$ y $V(x_0)$, respectivamente, donde z_β y $\chi_{(m-1,\beta)}$ denotan al β -cuantil de las distribuciones $N(0,1)$ y $\chi_{(m-1)}$, respectivamente.